

Лекция 2

Устойчивость автономных систем. Простейшие типы точек покоя

Нормальная система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если ее правые части f_i не зависят явно от t , т. е. если она имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это значит, что закон изменения неизвестных функций, описываемый автономной системой, не меняется со временем, как это бывает с физическими законами. Пусть имеем автономную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

и пусть (a_1, a_2, \dots, a_n) — такая совокупность чисел, что

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда система функций

$$x_i(t) \equiv a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

будет решением системы (1). Точку (a_1, a_2, \dots, a_n) фазового пространства (x_1, x_2, \dots, x_n) называют *точкой покоя* (*положением равновесия*) данной системы. Рассмотрим автономную систему (1), для которой

$$f_i(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

так что точка

$$x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

есть точка покоя этой системы. Обозначим через $S(R)$ шар

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < R^2$$

и будем считать, что для рассматриваемой системы в шаре $S(R)$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Определение. Будем говорить, что точка покоя

$$x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

системы (1) *устойчива*, если для любого $\varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < R$) существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любая траектория системы, начинающаяся в начальный момент $t = t_0$ в точке $M_0 \in S(\delta)$, все время затем остается в шаре $S(\varepsilon)$. Точка покоя *асимптотически устойчива*, если:

- 1) она устойчива;
- 2) существует такое $\delta_1 > 0$, что каждая траектория системы, начинающаяся в точке M_0 области $S(\delta_1)$, стремится к началу координат, когда время t неограниченно растет (рис. 7).

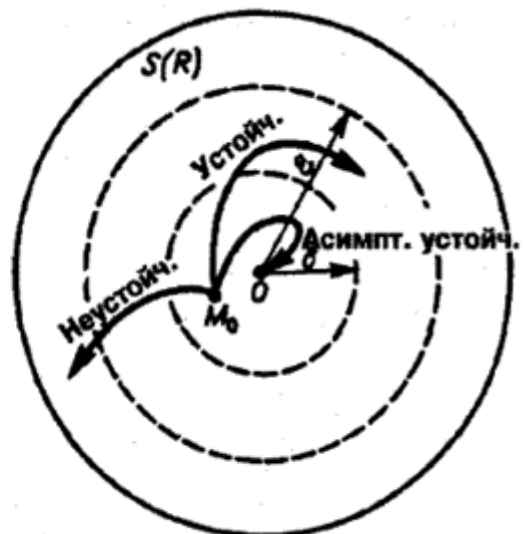


Рис. 7

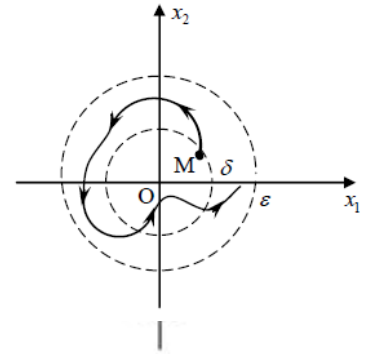
Поясним это определение примерами.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Траектории здесь — концентрические окружности

$$x^2 + y^2 = h^2$$



с центром в начале координат — единственной точкой покоя системы. Если взять $\delta = \epsilon$, то любая траектория, начинающаяся в круге $S(\delta)$, остается все время внутри $S(\delta)$, а следовательно, и внутри $S(\epsilon)$, так что имеет место устойчивость. Однако траектории не приближаются к началу координат при $t \rightarrow +\infty$ и точка покоя не является асимптотически устойчивой.

Пример 2. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

Ее решения:

$$x = Ae^{-t}, \quad y = Be^{-t}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} = k = \text{const},$$

поэтому траекториями являются лучи, входящие в начало координат (рис. 8). Можно снова выбрать $\delta = \epsilon$. Любая точка траектории, находящаяся в начальный момент внутри $S(\delta)$, остается все время в круге $S(\epsilon)$ и, кроме того, неограниченно приближается к началу координат при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, наблюдается асимптотическая устойчивость.

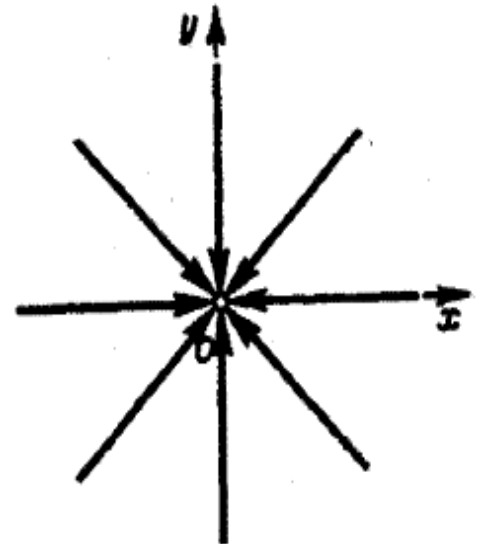


Рис. 8

Пример 3. Возьмем, наконец, систему

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y.$$

Ее решение

$$x = Ae^t, \quad y = Be^t.$$

Здесь также

$$\frac{y}{x} = k$$

и траекториями являются лучи, исходящие из начала координат, но в отличие от примера 2 движение по лучам происходит в направлении от центра. Точка покоя неустойчива. ►

Простейшие типы точек покоя

Иследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0, y = 0$ системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y,} \quad (2)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решение будем искать в виде

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}.$$

Для определения λ получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Величины α, β с точностью до постоянного множителя определяются из системы

$$(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0, \quad a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0.$$

Возможны следующие случаи.

А. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (3) — действительные и различные. Общее решение системы (2) имеет вид

$$x(t) = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = C_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4)$$

1. Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Точка покоя $(0, 0)$ в этом случае асимптотически устойчива, так как из-за наличия множителей $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ все точки каждой траектории, находившиеся в начальный момент $t = t_0$ в произвольной δ -окрестности начала координат, при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε -окрестности начала координат, а при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к этому началу. Такая точка покоя называется *устойчивым узлом*.

При $C_2 = 0$ из (4) получаем

$$x = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t},$$

откуда

$$y = \frac{\beta_1}{\alpha_1} x,$$

и траекториями являются два луча, входящие в начало координат с угловым коэффициентом

$$k_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Аналогично, при $C_1 = 0$ получаем еще два луча, входящие в начало координат с угловым коэффициентом

$$k_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Пусть теперь $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$ и (для определенности) $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Тогда в силу (4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 \beta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 \alpha_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}} \rightarrow \frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

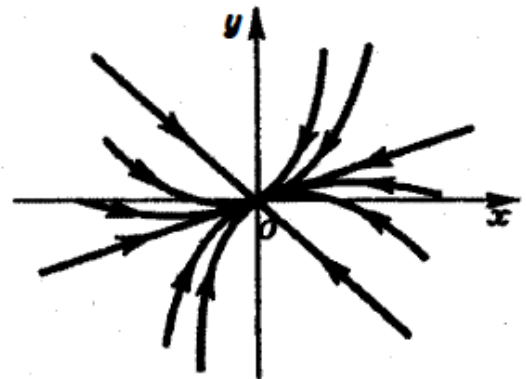


Рис. 9

т. е. все траектории (исключая лучи $y = \frac{\beta_1}{\alpha_1}x$) в окрестности точки покоя $O(0, 0)$ имеют направление луча

$$y = \frac{\beta_2}{\alpha_2}x$$

(рис. 9).

2. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то расположение траекторий такое же, как и в предыдущем случае, но точки движутся по траекториям в противоположном направлении. Точка покоя рассматриваемого типа называется *неустойчивым узлом* (рис. 10).

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y.$$

Для нее точка $O(0, 0)$ — точка покоя. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, так что налицо неустойчивый узел. Перейдем от данной системы к одному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

или

$$xdy - 2ydx = 0.$$

Оно имеет решения

$$y \equiv 0, \quad x \equiv 0 \quad \text{и} \quad y = Cx^2,$$

так что траекториями системы будут лучи, совпадающие с координатными полуосьми, и семейство парабол, касающихся оси Ox в начале координат (рис. 11). ▶

3. Пусть теперь $\lambda_1, \lambda_2 < 0$; тогда точка покоя неустойчива.

При $C_2 = 0$ получаем решение

$$x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t}.$$

С возрастанием t точка этой траектории движется по лучу

$$y = \frac{\beta_1}{\alpha_1}x$$

в направлении от начала ($\lambda_1 > 0$), неограниченно удаляясь от него. При $C_1 = 0$ имеем:

$$x = C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}.$$

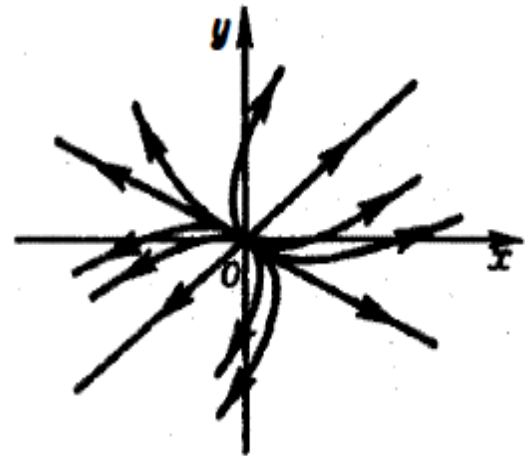


Рис. 10

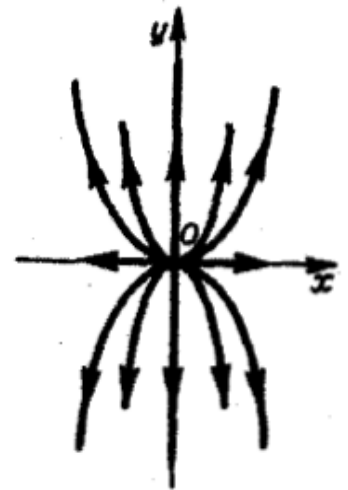


Рис. 11

Отсюда видно, что при возрастании t точка движется по лучу

$$y = \frac{\beta_2}{\alpha_2} x$$

в направлении к началу координат ($\lambda_2 < 0$). Если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, то как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$ траектория покидает окрестность точки покоя. Точка покоя рассматриваемого типа называется *седлом* (рис. 12).

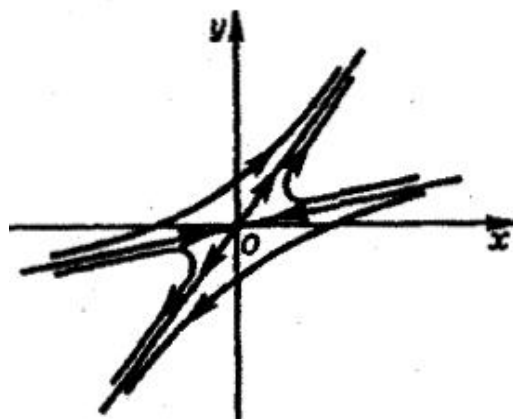


Рис. 12

Пример. Исследуем характер точки покоя $O(0, 0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = y. \quad (5)$$

◀ Характеристическое уравнение системы

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Перейдем к одному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x},$$

или

$$x dy + y dx = 0, \quad (6)$$

интегрируя которое получаем

$$xy = C.$$

Уравнение (6) имеет также решения $y \equiv 0$ и $x \equiv 0$.

Таким образом, интегральные кривые этого уравнения (траектории системы (5)) — равнобочные гиперболы и лучи, совпадающие с координатными полуосьями. ▶

Б. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения — комплексные: $\lambda_{1,2} = p \pm iq$, $q \neq 0$. Общее решение системы (2) можно представить в виде

$$x(t) = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \quad y(t) = e^{pt}(C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt), \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а C_1^*, C_2^* — некоторые линейные комбинации этих постоянных.

1. Пусть $\lambda_{1,2} = p + iq$, $p < 0$, $q \neq 0$; в этом случае множитель e^{pt} стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, а вторые множители в (7) — ограниченные периодические функции. Траектории — спирали, асимптотически приближающиеся к началу координат при $t \rightarrow +\infty$. Точка покоя $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчива. Она называется *устойчивым фокусом* (рис. 13).

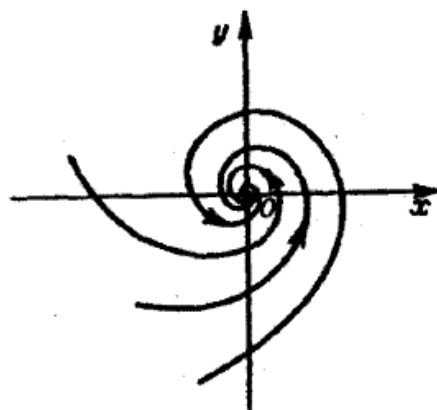


Рис. 13

2. Если $\lambda_{1,2} = p \pm iq$, $p > 0$, $q \neq 0$, то этот случай переходит в предыдущий при замене t на $-t$. Траектории не отличаются от траекторий предыдущего случая, но движение по ним при возрастании t происходит в противоположном направлении. Точка покоя неустойчива — *неустойчивый фокус*.

3. Если же $\lambda_{1,2} = \pm iq$, $q \neq 0$, то решения системы (2) — периодические функции. Траекториями являются замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку покоя, называемую в этом случае *центром* (рис. 14). Центр является устойчивой точкой покоя, однако асимптотической устойчивости нет, так как решение

$x(t) = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt$, $y(t) = C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

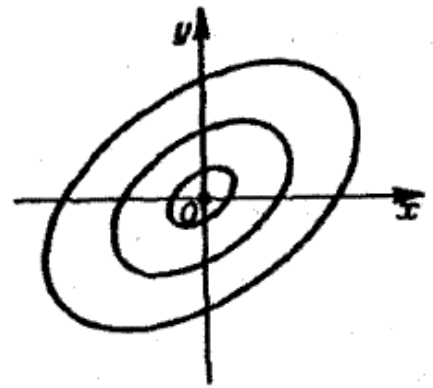


Рис. 14

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay \quad (a = \text{const}).$$

Характеристическое уравнение системы

$$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = a \pm i$.

Перейдем от системы к одному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + ay)}{(ax - y)} \quad (9)$$

и введем полярные координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$$

и

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}, \quad \rho^2 \frac{d\varphi}{dx} = x \frac{dy}{dx} - y.$$

Следовательно,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \frac{x + y y'}{x y' - y}.$$

Используя уравнение (9), находим, что

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = a\rho,$$

откуда

$$\rho = C e^{a\varphi}.$$

Эти интегральные кривые являются логарифмическими спиралями, навивающимися на начало координат, которое достигается в пределе при $\varphi \rightarrow +\infty$ или $\varphi \rightarrow -\infty$ в зависимости от того, будет ли $a < 0$ или $a > 0$. Налицо точка покоя типа фокуса. В частном случае, когда $a = 0$, уравнение (9) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Интегральные кривые этого уравнения — окружности с центром в начале координат, которое при $a = 0$ является точкой покоя системы (8) типа центра.

В. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения кратные: $\lambda_1 = \lambda_2$. Случай этот — скорее исключение, а не правило, так как сколь угодно малое изменение коэффициентов системы разрушает его. Применяя метод исключения, находим, что общее решение системы уравнений (2) имеет вид

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = (C_1^* + C_2^* t)e^{\lambda_1 t}$$

(C_1^*, C_2^* — некоторые линейные комбинации C_1, C_2).

1. Если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, то из-за наличия множителя $e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 < 0$, решения $x(t), y(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Точка покоя $x = 0, y = 0$ асимптотически устойчива. Ее называют *устойчивым вырожденным узлом* (рис. 15). Он отличается от узла в случае А.1 (там одна из траекторий имела касательную, отличную от всех остальных). Возможен также *дипритический узел* (см. рис. 8).

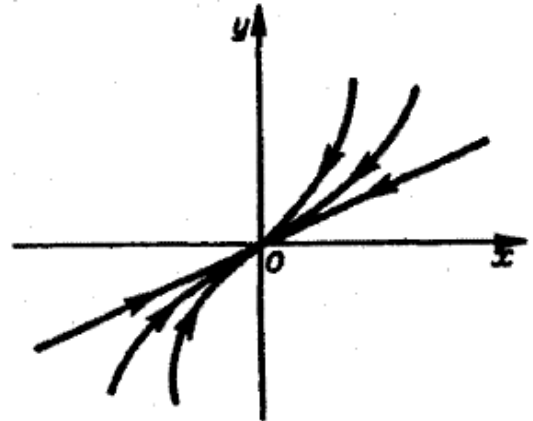


Рис. 15

2. При $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ замена t на $-t$ приводит к предыдущему случаю, но движение по траекториям происходит в противоположном направлении. Точка покоя в этом случае называется *неустойчивым вырожденным узлом*.

Пример. Для системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

характеристическое уравнение

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

имеет кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Деля второе уравнение системы на первое, найдем

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x},$$

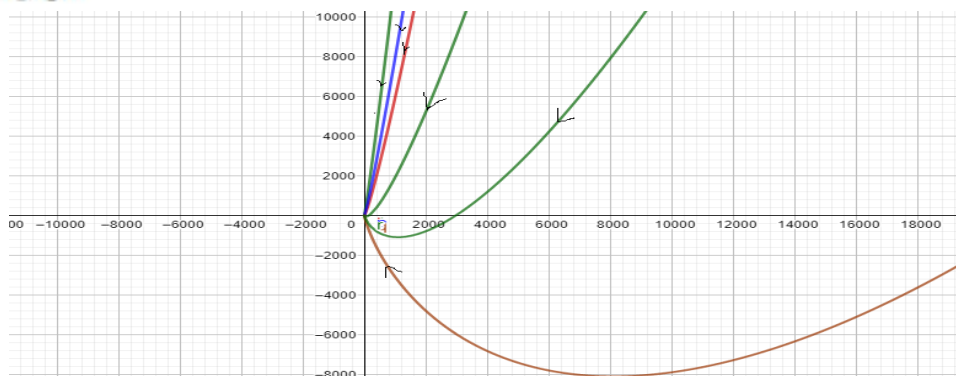
откуда

$$y = x(\ln|x| + C).$$

В этом случае

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + C + \ln|x|) = -\infty.$$

Поэтому все интегральные кривые проходят через начало координат, и все они имеют там ось Oy общей касательной.



Мы перебрали и исчерпали все возможности, поскольку случай $\lambda_1 = 0$ (или $\lambda_2 = 0$) исключен условием

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример. Исследовать уравнение малых колебаний маятника с учетом трения.

◀ Уравнение малых колебаний маятника в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - k \frac{dx}{dt}, \quad (*)$$

где x — угол малого отклонения маятника от вертикали, k — коэффициент трения. Заменяем уравнение (*) эквивалентной системой

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = -x - kx_1. \quad (**)$$

Характеристическое уравнение для системы (**)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0,$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}.$$

Если $0 < k < 2$, то эти корни будут комплексными с отрицательной действительной частью, так что нижнее положение равновесия маятника $x = x_1 = 0$ будет устойчивым фокусом. Решением уравнения (*) является функция

$$x(t) = Ae^{-\frac{k}{2}t} \sin(\omega t + \alpha),$$

где

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$$

— частота колебаний, а величины A, α определяются из начальных условий.

График решения и фазовая кривая при $0 < k < 2$ имеют вид, изображенный на рис. 16. При $k \rightarrow 0$, т. е. с уменьшением коэффициента трения, фокус превращается в центр: маятник будет совершать незатухающие периодические колебания. ▶

Сформулируем результаты, касающиеся устойчивости решений системы n линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

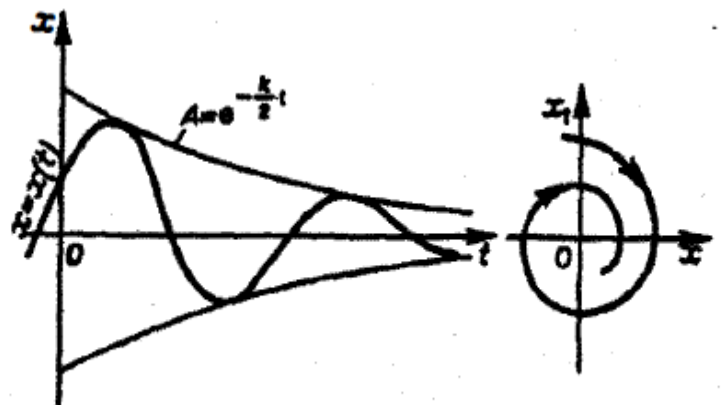


Рис. 16

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad a_{ij} = \text{const.} \quad (10)$$

Рассмотрим для системы (10) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Справедливы следующие предложения:

- 1) если все корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, то все решения системы (10) асимптотически устойчивы. Действительно, в этом случае все слагаемые общего решения содержат множители $e^{\text{Re } \lambda_k t}$, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow +\infty$;
- 2) если хотя бы один корень λ_k характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то все решения системы неустойчивы;
- 3) если характеристическое уравнение имеет простые корни с нулевой действительной частью (т. е. чисто мнимые или равные нулю корни), а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.

Эти результаты относятся и к одному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Следует обратить внимание на то, что для линейной системы все решения либо устойчивы, либо неустойчивы одновременно.

Теорема 2. Решения системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы.

◀ Преобразуем произвольное частное решение

$$\varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

системы (11) в тривиальное с помощью замены

$$y_i = x_i(t) - \varphi_i(t).$$

Система (11) преобразуется при этом в линейную однородную систему относительно $y_i(t)$:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Следовательно, все частные решения системы (11) в смысле устойчивости ведут себя одинаково, а именно как тривиальное решение однородной системы (12).

В самом деле, пусть тривиальное решение

$$y_i(t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

системы (12) устойчиво. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого другого решения системы $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, из условия $|y_i(t_0)| < \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$, следует, что

$$|y_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0.$$

Замечая, что $y_i(t) = x_i(t) - \varphi_i(t)$, получаем, что из условия

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

следует

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0$$

для всякого решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, исходной системы (11). Согласно определению, это означает устойчивость решения $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, этой системы. ►

Это предложение не имеет места для нелинейных систем, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие — неустойчивыми.

Пример. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2.$$

Оно имеет очевидные решения

$$x(t) = -1 \quad \text{и} \quad x(t) = 1.$$

Решение $x(t) = -1$ неустойчиво, а решение $x(t) = 1$ является асимптотически устойчивым. В самом деле, при $t \rightarrow +\infty$ все решения

$$x(t) = \frac{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - x_0)}, \quad x_0 \neq -1,$$

стремятся к +1. Это означает, согласно определению, что решение $x(t) = 1$ асимптотически устойчиво.

Замечание. Как и в случае $n = 2$, можно исследовать расположение траекторий в окрестности точки покоя $O(0, 0, 0)$ системы (10). Для $n = 3$ возможны так называемые узлофокусы (рис. 17), седлофокусы (рис. 18) и т.д.

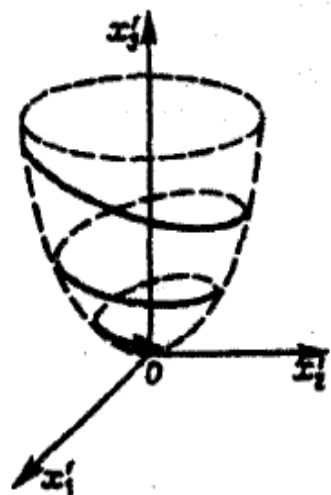


Рис. 17

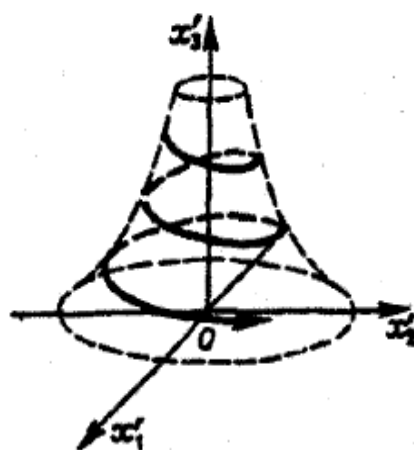


Рис. 18